

Математический анализ.

Тема5 Введение в математический анализ

§1. Функция. Предел функции

Определение 1. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x , если каждому значению x из области ее изменения соответствует единственное вполне определенное значение y :

Обозначение: $y = f(x)$

Определение 2. Если функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то она называется *неявной функцией* от x , например, $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 8 = 0$ - неявная функция от x .

Определение 3 (по Гейне). Число b называется пределом функции

$y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любой последовательности значений аргумента x , сходящейся к a , соответствующая последовательность значений функций сходится к числу b .

Обозначение:

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Если $x \rightarrow a$, то он может оставаться или меньше a или больше a .

В связи с этим существуют так называемые **односторонние пределы**:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1$$

$$x \rightarrow a$$

$$x < a$$

левосторонний

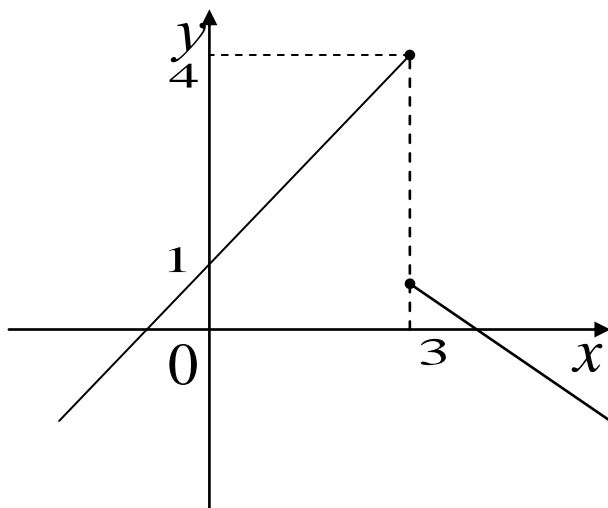
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_2$$

$$x \rightarrow a$$

$$x > a$$

правосторонний

Пример.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = 4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = 1$$

Если функция в данной точке непрерывна, то односторонние пределы равны.

§2. Теоремы о пределах

1) Предел постоянной:

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

2) Предел алгебраической суммы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x) - g(x)) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$$

3) Предел произведения функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Следствие: постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

4) Предел частного функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$$

где

$$g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

5) Предел степени :

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

§3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $f(x)$ -
бесконечно большая при значении

$$x \rightarrow x_0, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Определение 2. Функция $\alpha(x)$ -
бесконечно малая при значении

$$x \rightarrow x_0, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Свойства б. м. ф. и б. б. ф.

1. Сумма, разность, произведение б.м.ф., а также произведение б.м.ф. на постоянную величину – б.м.ф.

б.м.

б.м. - является неопределенностью вида

$$\frac{0}{0}$$

2. $\infty + \infty$, $|\infty \cdot \infty|$, $C \cdot \infty$ - **б.б.ф.**

$\infty - \infty$, $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ - **являются**

неопределенностями.

3. Если $f(x)$ - **б. б. ф.** при значении

$x \rightarrow x_0$, то $\frac{C}{f(x)}$ - **б. м. ф.** при значении

$x \rightarrow x_0$, где $C = \text{const}$, $C \neq 0$.

4. Если $\alpha(x)$ - **б. м. ф.** при значении

$x \rightarrow x_0$, то $\frac{C}{\alpha(x)}$ - **б. б. ф.** при значении

$x \rightarrow x_0$, где $C = \text{const}$, $C \neq 0$.

5. Соотношения вида $|0 \cdot \infty|$, $|1^\infty|$, $|\infty^\infty|$, $|0^\infty|$, $|\infty^0|$, $|0^0|$ тоже являются неопределённостями.

§4. Раскрытие неопределенности

вида $\left| \frac{0}{0} \right|$ при вычислении пределов.

Непосредственное вычисление пределов.

Вместо аргумента x подставляют его предельное значение в функцию.

Пример:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{1^2 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Правило раскрытия неопределенности

вида $\left| \frac{0}{0} \right|$

Если дробь содержит многочлены, то их следует разложить на линейные множители и выполнить сокращение.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Если под знаком предела есть иррациональное выражение, то нужно умножить числитель и знаменатель на сопряженные множители.

§5. Раскрытие неопределенности

вида $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ при вычислении
пределов.

Состоит в почленном делении числителя и знаменателя на переменную в наивысшей степени.

Пример:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 6}{x^3 - 3x} &= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{6}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2}} = \\&= \frac{2 + \frac{1}{\infty} + \frac{6}{\infty}}{1 - \frac{3}{\infty}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0} = 2\end{aligned}$$

Замечание:

- 1. Если старшие степени числителя и знаменателя равны, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.**
- 2. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то предел равен нулю.**

3. Если степень числителя больше степени знаменателя, то предел равен бесконечности.

§6. Два замечательных предела

1. Первый замечательный предел.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1}$$

Он раскрывает неопределенность вида $\left| \frac{0}{0} \right|$.

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot 6}{6x \cdot 4} = \frac{6}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2} \cdot \underset{=1}{}.$$

2. Второй замечательный предел.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e} \quad \text{или}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Он раскрывает неопределенность вида (1^∞) ($e \approx 2, 718281828459045.....$).- неперово число.
($e \approx 2, 72$).

Пример:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^2$$

§7. Непрерывность функции. Точки разрыва.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в некоторой точке** x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \Delta y \rightarrow 0$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$, непрерывная в каждой точке некоторого интервала $(a; b)$ называется **непрерывной на всем интервале**.

Определение 3. Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется **точкой разрыва**.

Существуют точки разрыва 1-го и 2-го рода.

1. Если односторонние пределы функции в данной точке не равны и конечные, то такая точка называется точкой разрыва 1-го рода.

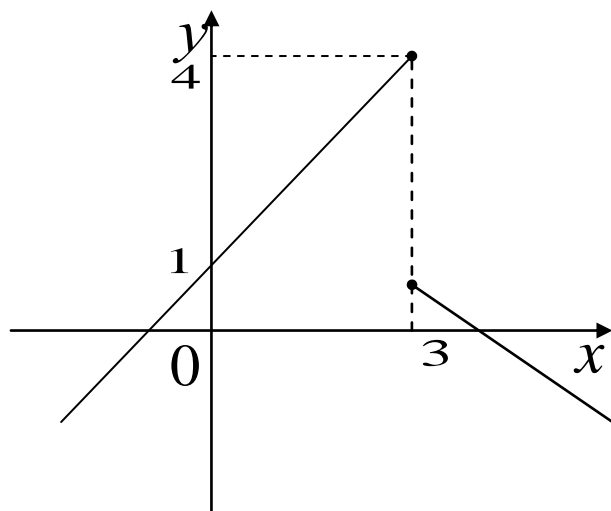
Скачок функции в этой точке равен модулю разности односторонних пределов:

скачок =	$\left \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right $
----------	--

Пример:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = 4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = 1$$



$x = 3$ – точка разрыва 1-го рода. Можно указать скачок функции:

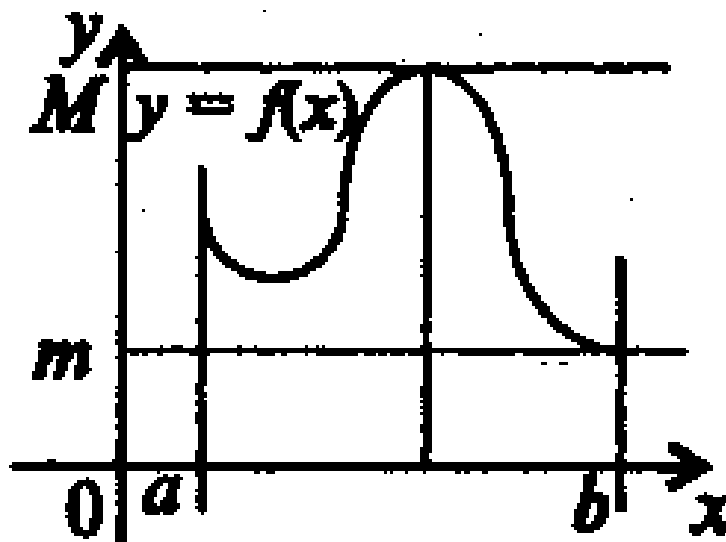
$$\left| \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) \right| = |1 - 4| = 3$$

справа слева

2. Если в данной точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то такая точка называется точкой разрыва 2-го рода.

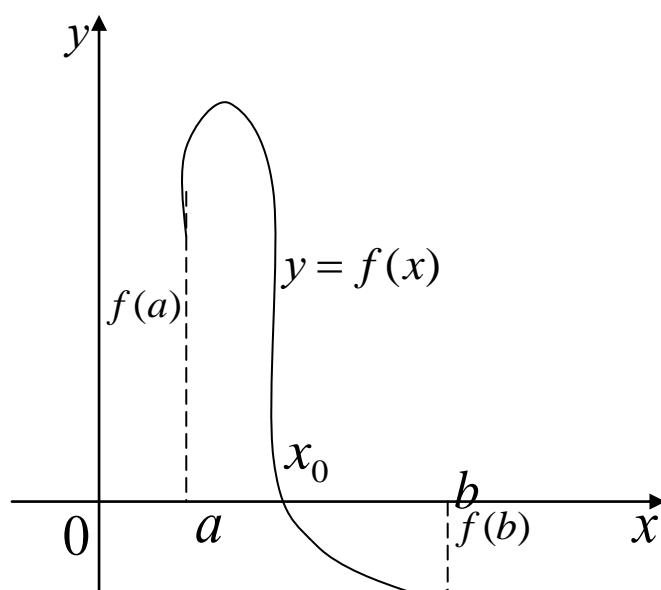
§8. Свойства функций, непрерывных на отрезке

1)



Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

2)



Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то на этом отрезке существует, по крайней мере, одно такое значение x_0 , что $f(x_0) = 0$.

3) Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то непрерывны $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) **на этом отрезке.**